1AC

Exercices corrigés :

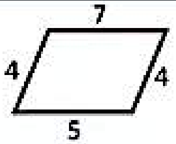
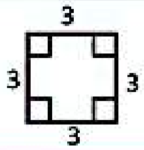
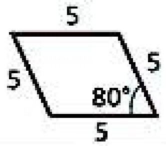
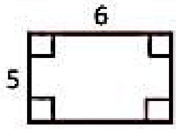
Quadrilatères particuliers

Série d'exercices (Quadrilatères particuliers 1AC)

PROF: DBAGHI Walid

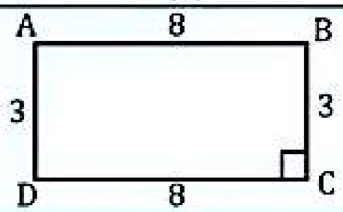
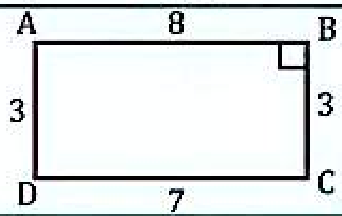
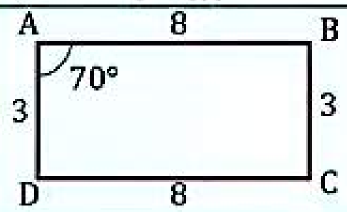
Exercice 1

répondre par **«Vrai»** ou **«Faux»** :

	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
				
				
				
				

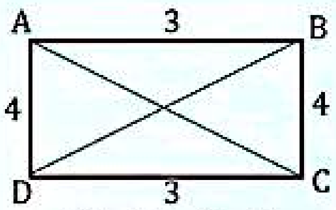
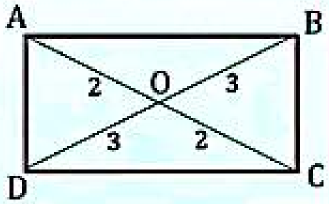
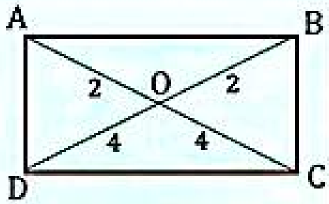
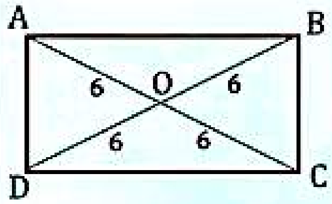
Exercice 2

En justifiant votre réponse déterminer dans chacun des cas suivants est ce que le quadrilatère ABCD est un rectangle ou non ?

1^{er} cas	$2^{ème}$ cas	$3^{ème}$ cas
		

Exercice 3

En justifiant votre réponse déterminer dans chacun des cas suivants est ce que le quadrilatère ABCD est un rectangle ou non ?

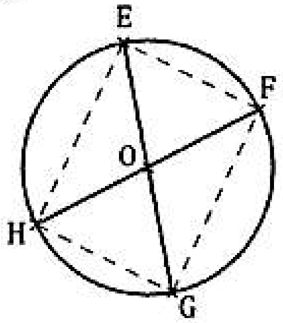
1^{er} cas	$2^{ème}$ cas	$3^{ème}$ cas	$4^{ème}$ cas
 BD=5 et AC=5			

Exercice 4

Construire un rectangle EFGH tel que FH=6cm

Exercice 11

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O.



Montrer que EFGH est un rectangle.

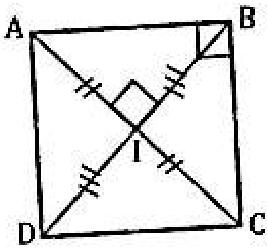
Exercice 12

Soit DEF un triangle tel que $\widehat{DEF} = 30°$ et $\widehat{EFD} = 60°$.

1) Construire G et H les symétriques respectifs des points E et F par rapport à D.
2) Montrer que EFGH est un losange.

Exercice 13

Voir la figure suivante, telle que $\widehat{ABC} = 90°$.



Montrer que ABCD est un carré.

Exercice 14

Soit [AB] un segment et soit (MK) la médiatrice de [AB] telle que K est le milieu de [AB].

1) a- Construire C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport à M.
   b- Montrer que ABCD est un rectangle.
2) a- Construire H le symétrique de M par rapport au point K.
   b- Montrer que AMBH est un losange.

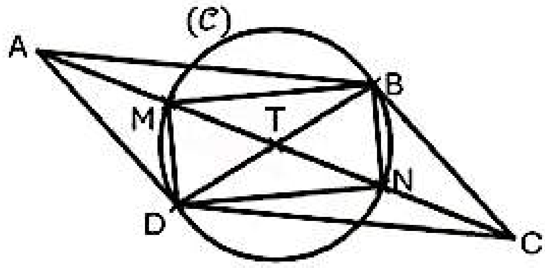
Exercice 15

1)Construire des points A,B,C,D,E,F tels que ABCD et BCFE sont deux carrés.

2) a- Montrer que D, C, F sont alignés.
   b- Montrer que $(BD)\perp(BF)$.
3) a- Construire N le symétrique de B par rapport au point C.
   b- Montrer que BDNF est un carré.

Exercice 16

Considérons la figure suivante telle que ABCD est un parallélogramme et $(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre [BD].

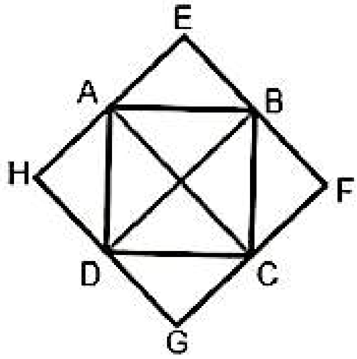


Montrer que MDNB est un rectangle.

Exercice 17

Considérons la figure suivante telle que :

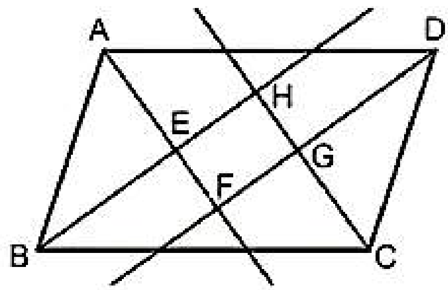
* ABCD est un carré.
* (EF) et (GH) sont perpendiculaires à (BD).
* (FG) et (EH) sont perpendiculaires à (AC).



1) Montrer que EFGH est un parallélogramme.
2) Montrer que EFGH est un rectangle.
3) a- Montrer que EACF et EBDH sont deux parallélogrammes.
   b- En déduire que EFGH est un carré.

Exercice 18

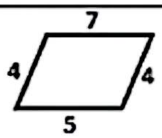
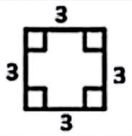
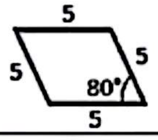
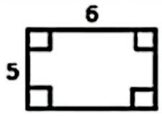
Considérons le parallélogramme ABCD suivant, tel que $\widehat{ADC} = 78°$, [AE) est la bissectrice de $\widehat{BAD}$, [BE) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$, [DG) est la bissectrice de $\widehat{ADC}$, [CG) est la bissectrice de $\widehat{BCD}$.



1) Calculer la mesure de $\widehat{DGC}$
2) Déterminer la nature du quadrilatère EFGH.

Correction :

Correction d'exercice 1 :

	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
	Faux	Faux	Faux	Faux
	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
	Vrai	Faux	Vrai	Faux
	Vrai	Vrai	Faux	Faux

Correction d'exercice 2 :

1er cas :

* On a AB=CD et AD=BC, alors ABCD est un parallélogramme. (I)
* ABCD possède un angle droit de sommet C. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un rectangle.

2ème cas :

On a AB≠DC, alors ABCD n'est pas un parallélogramme, donc ce n'est pas un rectangle.

3ème cas :

On a $\hat{A}=70°\neq 90°$, alors par définition ABCD n'est pas un rectangle.

Correction d'exercice 3 :

1er cas :

* On a AB=CD et AD=BC, alors ABCD est un parallélogramme. (I)
* On a BD=AC=5, c-à-d les diagonales sont isométriques. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un rectangle.

2ème cas :

* On a : AC=AO+OC=2+2=4
  et BD=BO+OD=3+3=6

  Donc AC≠BD, c-à-d les diagonales ne sont pas isométriques.
  Alors ABCD n'est pas un rectangle.

3ème cas :

* Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
* On a AO≠OC, alors O n'est pas le milieu de la diagonale [AC].
  Alors ABCD n'est pas un parallélogramme, donc ce n'est pas un rectangle.

4ème cas :

* Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
  On a AO=OC et BO=OD, alors O est le milieu des diagonales [AC] et [BD]. (I)
* On a AC=AO+OC=6+6=12
  et BD=BO+OD=6+6=12
  alors AC=BD, c-à-d les diagonales sont isométriques. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un rectangle.

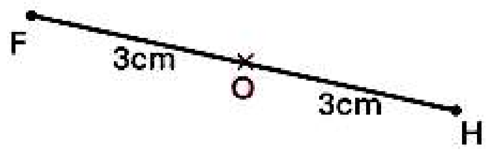
Correction d'exercice 4 :

Remarque : pour que EFGH soit un rectangle, il faut que ses diagonales [EG] et [FH] soient isométriques et qu'ils se coupent en leur milieu.
Alors On a EG=FG=6cm
et si O est le milieu de [EG] et [FH], alors :

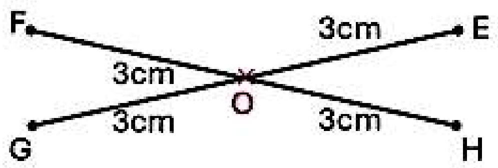
OF=OH=OE=OG=3cm

Étape 1 : On construit [FH] de longueur 6cm

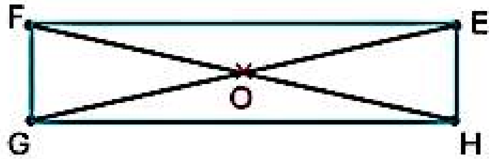
Étape 2 : On construit O le milieu de [FH].



Étape 3 : On construit une autre diagonale [EG], tel que O est le milieu de [EG] et OE=OG=3cm.



Finalement : On obtient le rectangle EFGH



Correction d'exercice 5 :

1er cas :

On a $\widehat{D} + \widehat{C} = 100 + 70 = 170° \neq 180°$, c-à-d deux angles consécutifs qui ne sont pas supplémentaires. Alors ABCD n'est pas un parallélogramme, donc ce n'est pas un losange.

2ème cas :

* Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. On a AO≠OC, donc O n'est pas le milieu de [AC].

Alors ABCD n'est pas un parallélogramme, donc ce n'est pas un losange.

3ème cas :

* On a $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$, alors ABCD est un parallélogramme. (I)
* On a AB=AD, c-à-d deux côtés consécutifs isométriques. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un parallélogramme.

4ème cas :

On a AD≠AB, donc par définition ABCD n'est pas un losange.

Correction d'exercice 6 :

1er cas :

On a $\widehat{AOB} = 100° \neq 90°$, c-à-d les diagonales ne sont pas perpendiculaires. Alors ABCD n'est pas un losange.

2ème cas :

* On a les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. (I)
* Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. On a AO=OC et OD=OB, alors O est le milieu des diagonales [AC] et [BD]. Donc ABCD est un parallélogramme. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un losange.

3ème cas :

On a : $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 20 + 60 = 80°$
et $\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 30 + 40 = 70°$

Alors $\widehat{BAD} \neq \widehat{BAC}$, c-à-d deux angles opposé qui ne sont pas isométriques.
Alors ABCD n'est pas un parallélogramme, donc ce n'est pas un losange.

Correction d'exercice 7 :

1er cas :

* On a AB=BC=CD=AD, alors ABCD est un losange. (I) , donc en particulier c'est un parallélogramme. (*)
- ABCD possède un angle droit de sommet A. (**)
* D'après (*) et (**), on déduit que ABCD est un rectangle. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un carré.

$2^{ème}$ cas :

On a AC=AO+OC=3+3=6

et BD=BO+OD=5+5=10

Alors AC≠BD, c-à-d les diagonales ne sont pas isométriques. Alors ABCD n'est pas un rectangle, donc ce n'est pas un carré.

$3^{ème}$ cas :

- Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
  On a AO=OC et BO=OD, alors O est le milieu des diagonales.
  Donc ABCD est un parallélogramme. (*)
- On a AC=OA+OC=3+3=6
  et BD=OB+OD=3+3=6
  Alors les diagonales [AC] et [BD] sont isométriques. (**)

* D'après (*) et (**), on déduit que ABCD est un rectangle. (I)

- On a les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. (***)

* D'après (*) et (***), on déduit que ABCD est un losange. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un carré.

$4^{ème}$ cas :

- Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
  On a AO=OC et BO=OD, alors O est le milieu des diagonales.
  Donc ABCD est un parallélogramme. (*)
- On a AC=OA+OC=4+4=8
  et BD=OB+OD=4+4=8
  Alors les diagonales [AC] et [BD] sont isométriques. (**)

* D'après (*) et (**), on déduit que ABCD est un rectangle. (I)

- On a AB=BC, c-à-d deux côtés consécutifs isométriques. (***)

* D'après (*) et (***), on déduit que ABCD est un losange. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un carré.

$5^{ème}$ cas :

On a $\widehat{DOC} = 70° \neq 90°$, c-à-d les diagonales ne sont pas perpendiculaires. Alors ABCD n'est pas un losange, donc ce n'est pas un carré.

Correction d'exercice 8 :

losange + rectangle= carré

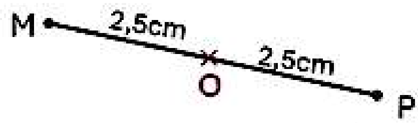
* diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu nous donnent un losange.
* diagonales isométriques qui se coupent en leur milieu nous donnent un rectangle.

Remarque : pour que MNPK soit un carré, il faut que ses diagonales [MP] et [NK] soient isométriques et perpendiculaires et qu'ils se coupent en leur milieu.
Alors On a MP=NK=5cm
et si O est le milieu de [MP] et [NK], alors :

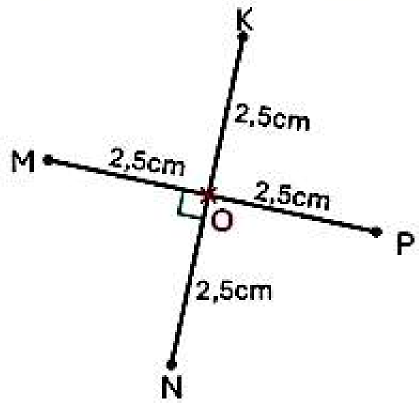
OM=OP=ON=OK=2,5cm

Étape 1 : On construit [MP] de longueur 5cm

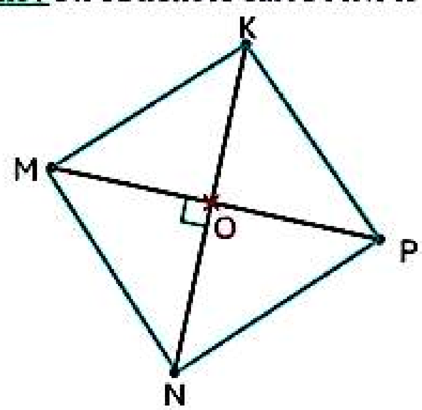
Étape 2 : On construit O le milieu de [MP]



Étape 3 : On construit une autre diagonale [NK], tel que O est le milieu de [NK] et OK=ON=2,5cm et (NK)⊥(MP).

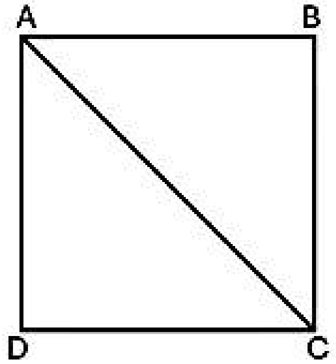


Finalement : On obtient le carré MNPK



(Exercices d'approfondissement)

Correction d'exercice 9 :



* On a ABCD est un carré, alors :

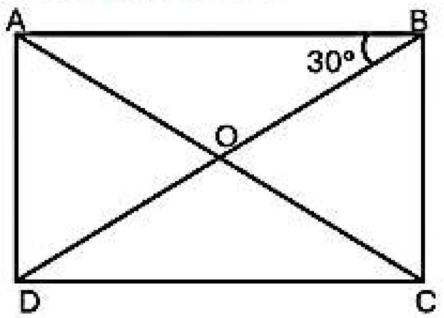
$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90°$$

* On a ABCD est un carré, alors AB=BC, donc ABC est un triangle isocèle en B, et on a :

$$\widehat{BAC} = \left(180 - \widehat{ABC}\right) \div 2$$
$$= (180 - 90) \div 2$$
$$= 90 \div 2$$
$$\widehat{BAC} = 45°$$

Et puisque $\widehat{DAB} = 90°$, alors $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} \div 2$, d'où [AC) est la bissectrice de $\widehat{DAB}$.

Correction d'exercice 10 :



On a ABCD est un rectangle de centre O, alors $\widehat{ABC} = 90°$.Donc :

$$\widehat{OBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD}$$
$$= 90 - 30$$
$$\widehat{OBC} = 60°$$

* On a ABCD est un rectangle de centre O, alors AC=BD et O est le milieu de [AC] et [BD], donc AO=OC=BO=OD. Alors BOC est un triangle isocèle en O, donc :

$$\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 60°$$

et $\widehat{BOC} = 180 - \left(\widehat{OCB} + \widehat{OBC}\right)$

$$= 180 - (60 + 60°)$$
$$= 180 - 120$$
$$\widehat{BOC} = 60°$$

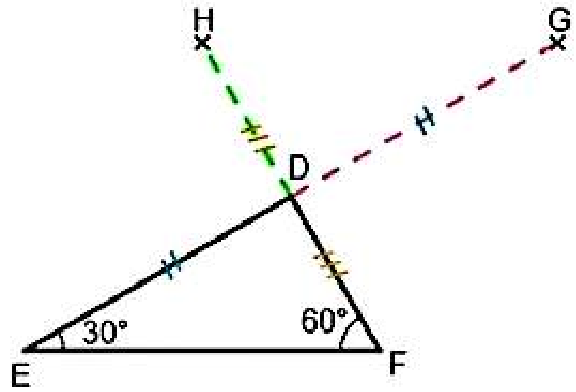
Donc $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{BOC} = 60°$. D'où OBC est un triangle équilatéral.

Correction d'exercice 11:

* On a $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de diamètres [EG] et [FH], alors :
  1) O est le milieu des diagonales [EG] et [FH], donc EFGH est un parallélogramme. (I)
  2) EG=FH, c-à-d les diagonales sont isométriques. (II)
* D'après (I) et (II), on déduit que EFGH est un rectangle.

Correction d'exercice 12 :

1)



2)

* On a G et H sont les symétriques respectifs de E et F par rapport à D, alors D est le milieu des diagonales [GE] et [HF].
  Donc EFGH est un parallélogramme. (I)
* On a $\widehat{EDF} = 180 - \left(\widehat{DEF} + \widehat{EFD}\right)$

$$= 180 - (30 + 60) = 180 - 90$$

Alors : $\widehat{EDF} = 90°$, c-à-d les diagonales sont perpendiculaires. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un losange.

Correction d'exercice 13 :

- On a I est le milieu des diagonales [AC] et [BD], Alors ABCD est un parallélogramme. (*)
- ABCD possède un angle droit de sommet B. (**)

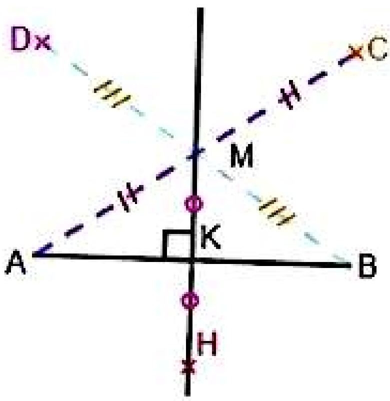
* D'après (*) et (**), on déduit que ABCD est un rectangle. (I)

- On a les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. (***)

* D'après (*) et (***), on déduit que ABCD est un losange. (II)
* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un carré.

Correction d'exercice 14 :

1) a-



b-

* On a C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à M, alors M est le milieu des diagonales [AC] et [BD]. Donc ABCD est un parallélogramme. (I)
* On a (MK) est la médiatrice de [AB], alors : AM=MB. (*) et puisque M est le milieu de [AC] et de [BD], alors AC=2AM et BD=2MB. (**)
  - D'après (*) et (**), on déduit que AC=2AM=2MB=BD, c-à-d les diagonales [AC] et [BD] sont isométriques. (II)
* D'après (I) et (II), on déduit que ABCD est un rectangle.

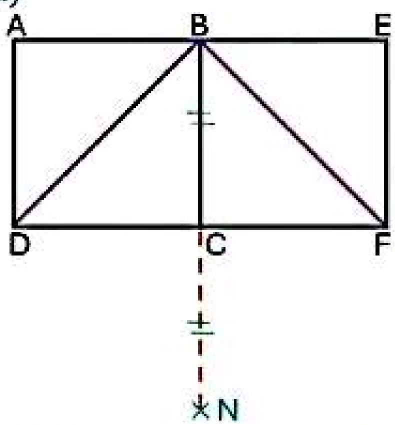
2) a- Voir la figure

b-

* On a H est le symétrique de M par rapport à K, alors K est le milieu de la diagonale [HM]. Et puisque K est le milieu de l'autre diagonale [AB], alors AMBH est un parallélogramme. (I)
* On a (KM) est la médiatrice de [AB], alors (KM)⊥(AB). Et puisque K est le milieu de [MH], alors les diagonales (HM) et (AB) sont perpendiculaires. (II)
* D'après (I) et (II), on déduit que AMBH est un losange.

Correction d'exercice 15 :

1) et 3-a)



2)a- On a ABCD et BCEF sont deux carrés, alors :

$\widehat{DCF} = \widehat{BCD} + \widehat{BCF} = 90° + 90°$

$\widehat{DCF} = 180°$, donc D, C, F sont alignés.

b-

$\widehat{DBF} = \widehat{DBC} + \widehat{FBC}$

- On a ABCD et BCEF sont deux carrés, alors les triangles BCD et BCF sont isocèles et rectangles en C. Donc :

$\widehat{DBC} = \left(180 - \widehat{BCD}\right) \div 2$

$= (180 - 90) \div 2$

$\widehat{DBC} = 45°$

- De la même manière on trouve que $\widehat{FBC} = 45°$

* Alors : $\widehat{DBF} = \widehat{DBC} + \widehat{FBC} = 45 + 45$

Donc $\widehat{DBF} = 90°$, c-à-d (DB)⊥(BF)

3) b-

- On a B est le symétrique de N par rapport à C, alors C est le milieu de la diagonale [BN]. (#)
- On a ABCD et BCFE sont deux carrés, alors DC=BC=CF.
Puisque DC=CF et D, C, F sont alignés, alors C est le milieu de la diagonale [DF]. (##)
* D'après (#) et (##), on déduit que BDNF est un parallélogramme. (*)

- D'après la question (2-b), on a (DB)⊥(BF) c-à-d BDNF possède un angle droit de sommet B. (**)
* D'après (*) et (**), on déduit que BDNF est un rectangle. (I)

- On a ABCD est un carré, alors (BC)⊥(DC), et puisque C est le milieu de [BN] et [DF], alors (BN)⊥(DF), c-à-d les diagonales (BN) et (DF) sont perpendiculaires. (***)

* D'après (*) et (***), on déduit que BDNF est un losange. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que BDNF est un carré.

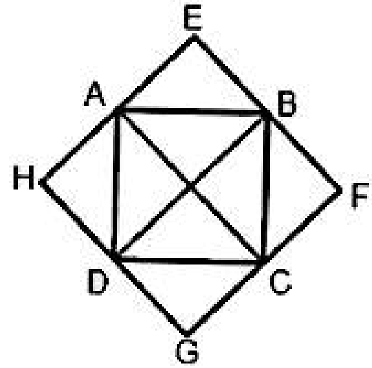
Correction d'exercice 16 :

* On a ABCD est un parallélogramme de centre T, alors T est le milieu de [BD]. (*)
Et puisque [BD] est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$, alors T est le centre de ce cercle. Et puisque M et N sont deux points du cercle tels que T∈[MN], alors T est le milieu de [MN]. (**)
* D'après (*) et (**), on déduit que T est le milieu des diagonales [BD] et [MN], donc MBDN est un parallélogramme. (I)

* On a $(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètres [BD] et [MN], alors : BD=MN, c-à-d : les diagonales sont isométriques. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que MDNB est un rectangle.

Exercice 17 :



* On a : (EF)⊥(BD) « 1 » et (GH)⊥(BD) « 2 » et (FG)⊥(AC) « 3 » et (EH)⊥(AC) « 4 »
* On a ABCD est un carré, alors (AC)⊥(BD) « 5 »

1)
« 1 » et « 2 » nous donnent (EF)//(GH) « 6 »
« 3 » et « 4 » nous donnent (FG)//(EH) « 7 »
D'après « 6 » et « 7 », on déduit que EFGH est un parallélogramme.

2)
* D'après la question précédente, on a EFGH est un parallélogramme. (*)
« 1 » et « 5 », nous donnent (EF)//(AC) « 8 »
« 4 » et « 8 », nous donnent (EH)⊥(EF) « 9 »,
c-à-d EFGH possède un angle droit de sommet E. (**)

* D'après (*) et (**), on déduit que EFGH est un rectangle.

3) a-
* D'après « 7 », on a (FG)//(EH). Et puisque C∈(FG) et A∈(EH) , alors (CF)//(AE) « 10 »
D'après « 8 » et « 10 », on déduit que EACF est un parallélogramme.

* « 1 » et « 9 » nous donnent (BD)//(EH) « 11 »
D'après « 6 », on a (EF)//(GH). Et puisque B∈(EF) et D∈(GH) , alors (BE)//(DH) « 12 »
D'après « 11 » et « 12 », on déduit que EBDH est un parallélogramme.

b- * D'après la question 2, on a EFGH est un rectangle. (I)

* D'après la question 1, on a EFGH est un parallélogramme. (*)

* On a ABCD est un carré, alors AC=BD. « 13 »
  - D'après la question précédente, on a EACF et EBDH sont deux parallélogrammes, alors : EF=AC et EH=BD « 14 »
  - D'après « 13 » et « 14 », on déduit que : EF=AC=BD=EH. C-à-d [EF] et [EH] sont deux côtés consécutifs isométriques. (***)

* D'après (*) et (***), on déduit que EFGH est un losange. (II)

* D'après (I) et (II), on déduit que EFGH est un carré.

Correction d'exercice 18 :

1)

* On a [DG) est la bissectrice de $\widehat{ADC}$, alors :

$$\widehat{GDC} = \widehat{ADC} \div 2 = 78 \div 2 = 39°$$

* On a ABCD est un parallélogramme, alors :

$$\begin{aligned}\widehat{ADC} + \widehat{DCB} &= 180° \\ \widehat{DCB} &= 180° - \widehat{ADC} \\ &= 180 - 78 \\ \widehat{DCB} &= 102°\end{aligned}$$

On a [CG) est la bissectrice de $\widehat{DCB}$, alors :

$$\widehat{DCG} = \widehat{DCB} \div 2 = 102 \div 2 = 51°$$

* Dans le triangle DCG, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{DGC} &= 180 - \left(\widehat{GDC} + \widehat{DCG}\right) \\ &= 180 - (39 + 51) \\ &= 180 - 90 \\ \widehat{DGC} &= 90°\end{aligned}$$

2)

* **Calculons $\widehat{HGF}$:**

On a $\widehat{HGF}$ *et* $\widehat{DGC}$ sont deux angles opposés par le sommet G, alors $\widehat{HGF} = \widehat{DGC} = 90$ (I)

* **Calculons $\widehat{EFG}$:**

On a [DG) est la bissectrice de $\widehat{ADC}$, et F∈[DG), alors :

$$\widehat{ADF} = \widehat{GDC} = 39°$$

On a ABCD est un parallélogramme, alors :

$$\widehat{DAB} = \widehat{DCB} = 102°$$

On a [AE) est la bissectrice de $\widehat{DAB}$, et F∈[AE) alors :

$$\widehat{FAD} = \widehat{DAB} \div 2 = 102 \div 2 = 51°$$

Dans le triangle DAF, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{AFD} &= 180 - \left(\widehat{FAD} + \widehat{ADF}\right) \\ &= 180 - (51 + 39) \\ &= 180 - 90 \\ \widehat{AFD} &= 90°\end{aligned}$$

et puisque E∈[AF] et G∈[DF], alors $\widehat{EFG} = 90°$ (II)

* **Calculons $\widehat{EHG}$:**

On a [CG) est la bissectrice de $\widehat{DCB}$, et H∈[CG) alors :

$$\widehat{BCH} = \widehat{DCG} = 51°$$

On a ABCD est un parallélogramme, alors :

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 78°$$

On a [BE) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$, et H∈[BE) alors :

$$\widehat{HBC} = \widehat{ABC} \div 2 = 78 \div 2 = 39°$$

Dans le triangle BHC, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{BHC} &= 180 - \left(\widehat{BCH} + \widehat{HBC}\right) \\ &= 180 - (51 + 39) \\ &= 180 - 90 \\ \widehat{BHC} &= 90°\end{aligned}$$

et puisque E∈[BH] et G∈[HC], alors :

$$\widehat{EHG} = 90° \text{ (III)}$$

* **Calculons $\widehat{HEF}$:**

D'après (I) et (II), on a (HG)⊥(GF) et (EF)⊥(GF), alors (HG)//(EF). Et puisque (EG)⊥(GH) (d'après III), alors (EG)⊥(EF), c-à-d $\widehat{HEF} = 90°$.

Finalement :

Puisque $\widehat{HGF} = \widehat{EFG} = \widehat{EHG} = \widehat{HEF} = 90°$, alors EFGH est un rectangle.